

# Испитивање функција, основна „теорија”

Материјал припремио **Jacob Linus**

Испитивање функција можемо разложити на следеће делове:

1. Област дефинисаности функције (или домен функције)
2. Нуле и знак функције
3. Парност и периодичност функције
4. Граничне вредности функције на крајевима домена
5. Асимптоте функције
6. Први извод, монотоност и локални екстреми функције
7. Други извод, конвексност и превојне тачке функције
8. Цртање графика функције.

Сада ћемо се детаљније осврнути на сваки од ових делова.

1. *Област дефинисаности функције (или домен функције)* Најчешће ће функција  $f$  коју испитујемо бити састављена (прецизније математички би се рекло да је композиција) од више елементарних функција, тј. могли бисмо функцију  $f$  да представимо као  $f = g(h(x))$ . Углавном ће функција  $f$  бити дефинисана за исте вредности  $x$  као и  $h$ , сем неколико изузетака:

1.  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  је дефинисан када су дефинисане и  $g(x)$  и  $h(x)$  и кад је  $h(x) \neq 0$ ;
2.  $f(x) = \log_a g(x)$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $g(x) > 0$ ;
3.  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $g(x) \geq 0$  (исто важи и за било који ”паран” корен:  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[6]{\phantom{x}}$ ...);
4.  $f(x) = \operatorname{tg} g(x)$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $g(x) \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;
5.  $f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $g(x) \neq 2k + 1\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ;
6.  $f(x) = \arcsin g(x)$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $-1 \leq g(x) \leq 1$ ;
7.  $f(x) = \arccos g(x)$  је дефинисан када је дефинисана и  $g(x)$  и када је  $-1 \leq g(x) \leq 1$ .

2. *Нуле и знак функције* На овом делу се нећемо претерано задржавати јер се на неки начин подразумева средњошколско знање решавања квадратних, логоритамских, експоненцијалних, тригонометријских једначина и неједначина, као и неједначина везаних за рационалне функције. Овде ћемо се подсетити само најзначајније материје.

1. Решења **квадратне једначине**  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  су  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (и узмимо да је  $x_1 < x_2$ ), а за знак имамо два случаја у зависности какав је коефицијент  $a$ :  
1°  $a > 0$  функција  $f$  је позитивна на интервалима  $(-\infty, x_1)$  и  $(x_2, \infty)$ , а негативна на  $(x_1, x_2)$ ;  
2°  $a < 0$   $f > 0$  за  $x \in (x_1, x_2)$ , а  $f < 0$  за  $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ .

2. **Експоненцијална функција**  $e^x$  је дефинисана на целом  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  и ту је увек позитивна! Тј.  $f(x) = e^{g(x)} > 0$  за свако  $x$  из домена  $D$  функције  $g(x)$ , а  $f(x) = e^{g(x)} = 0$  и  $f(x) = e^{g(x)} < 0$  се не дешава никад.

3. За **логоритамску функцију**  $f(x) = \ln g(x)$  важи да је  $f(x) = 0$  кад је  $g(x) = 1$ ,  $f(x) > 0$  кад је  $g(x) > 1$ , а  $f(x) < 0$  кад је  $0 < g(x) < 1$ . Сваку другу основу логаритма можемо свести на основу природног логаритма, тј.  $\ln: \log_a g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln a}$ .

4. Добро познавање тригонометријских функција захтева много више простора, тако да ћемо се осврнути само на **инверзне тригонометријске функције**:  $f(x) = \arcsin g(x) = 0$  за оне вредности кад је  $g(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$  кад је  $0 < g(x) \leq 1$ , а  $f(x) < 0$  кад је  $-1 \leq g(x) < 0$ .

$f(x) = \arccos g(x) = 0$  кад је  $g(x) = 1$ ,  $f(x) > 0$  кад је  $-1 \leq g(x) < 1$ , а  $f(x) < 0$  није никад.  
 $f(x) = \operatorname{arctg} g(x) = 0$  кад је  $g(x) = 0$ ,  $f(x) > 0$  кад је  $g(x) > 0$ , а  $f(x) < 0$  кад је  $g(x) < 0$ .  
 $f(x) = \operatorname{arcctg} g(x)$  је увек позитивно, тј.  $f(x) > 0$  за свако  $x$  из домена  $D$  функције  $g(x)$ .

**3. Парност и периодичност функције** За функцију  $f(x)$  кажемо да је парна ако је  $f(-x) = f(x)$  за свако  $x$  из домена  $D$  (одређеног под 1).  $f(x)$  је непарна ако је  $f(-x) = -f(x)$  за свако  $x$  из домена  $D$ . Ако је функција парна или непарна потребно је то показати, а ако није ни парна ни непарна онда је довољно наћи неку вредност  $x = a \in D$  за коју је  $f(-a) \neq f(a)$  и  $f(-a) \neq -f(a)$ .

За функцију  $f(x)$  кажемо да је периодична ако постоји број  $T$  такав да је  $f(x) = f(x+T)$  за свако  $x$  из домена  $D$ . Најмањи такав број  $T$  означаваћемо са  $\omega$  и он се назива период функције  $f$ . Такође ако је функција периодична потребно је то показати, а ако није то се може закључити на основу претходна три дела испитивања функција (домена, нула и знака, граничних вредности).

**4. Граничне вредности функције на крајевима домена** Ако се домен  $D$  може представити као унија интервала облика  $(a, b)$  потребно је за сваки од тих интервала одредити следеће две граничне вредности:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ . Ако је нека од вредности  $a$  и  $b$  бесконачна, потребно је одредити одговарајући бесконачни лимес, нпр. ако је  $D = \mathbb{R}$  одређујемо  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Ако имамо интервал облика  $(a, b]$  потребно је одредити  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  и вредност  $f(b)$  и слично за  $[a, b)$ . Некад је потребно користити и Лопиталово правило (може се применити само на лимесе облика  $\frac{0}{0}$  или облика  $\frac{\infty}{\infty}$ !).

**5. Асимптоте функције** Имамо две врсте асимптота: вертикалне и косе (хоризонталне су специјални случај косих). Вертикалне асимптоте се јављају кад имамо прекид у домену: права  $x = a$  је вертикална асимптота ако  $a$  не припада домену, а бар један од лимеса  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  постоји и бесконачан је ( $+\infty$  или  $-\infty$ ). Лева коса асимптота постоји ако постоје следећа два лимеса и коначни су  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  и  $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - k \cdot x$  (где је  $k$  првоодређени лимес) и тада је лева коса асимптота права  $y = kx + n$ . Потпуно слично десна коса асимптота постоји ако постоје и коначни су лимеси  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  и  $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - k \cdot x$  и тада је десна коса асимптота права  $y = kx + n$ . Ако се лева и десна асимптота поклапају (тј. то је иста права) кажемо да имамо обострану асимптоту. Хоризонтална асимптота се јавља када је коефицијент  $k = 0$  (случај када је неки од лимеса  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  коначан).

**6. Први извод, монотоност и локални екстремуми функције** Према правилима диференцирања се одреди први извод  $f'(x)$  функције  $f(x)$ . Даља анализа се своди на одређивање нула и знака првог извода: када је  $f'(x) = 0$  имамо кандидата за екстремум (максимум или минимум). На сваком од интервала на коме је  $f'(x) > 0$  за свако  $x$  имамо да је функција растућа и то ћемо означавати стрелицом  $\nearrow$ , а на сваком од интервала на коме је  $f'(x) < 0$  за свако  $x$  имамо да је функција опадајућа, тј.  $\searrow$ . Сад се враћамо на питање одређивања екстремума: кандидат  $x = a$  је локални максимум ако је до  $a$  функција  $f$  растућа, а након  $a$  опадајућа,  $\nearrow a \searrow$ , а кандидат  $x = a$  је локални минимум ако је до  $a$  функција  $f$  опадајућа, а након  $a$  растућа,  $\searrow a \nearrow$  и ту треба израчунати вредност функције,  $f(a)$  и ту тачку означавамо на графику. Остала два случаја ( $\searrow a \searrow$  и  $\nearrow a \nearrow$ ) нису екстремуми. Веома често се заборавља да се испита начин како (тј. под којим углом) функција "улази" у неку тачку или "излази" из ње. Први од та два случаја се јавља када у неком прекиду  $x = a$  имамо да је  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  коначан (а други када је за неки прекид  $x = a$  имамо да је  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  коначан) и тада је коефицијент правца тангенте на криву у околини тачке  $(a, f(a))$  дат са  $k = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$  (тј.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ ).

7. *Други извод, конвексност и превојне тачке функције* Према правилима диференцирања се одреди други извод  $f''(x)$  функције  $f(x)$  (то је први извод већ одређене функције  $f'(x)$ ). Даља анализа се своди на одређивање нула и знака другог извода: када је  $f''(x) = 0$  имамо кандидата за превојну тачку. На сваком од интервала на коме је  $f''(x) > 0$  за свако  $x$  имамо да је функција конвексна и то ћемо означавати  $\cup$ , а на сваком од интервала на коме је  $f''(x) < 0$  за свако  $x$  имамо да је функција конкавна, тј.  $\cap$ . Превојна тачка  $x = a$  је она где се мења конвексност. Исто као и код минимума и максимума одређујемо вредност функције  $f(a)$  и ту тачку означавамо на графику.

8. *Цртање графика функције* На графику означавамо (ако постоје) следеће тачке: нуле, тачку  $(0, f(0))$  (то је пресек са  $y$ -осом), минимуме и максимуме, превојне тачке, затим цртамо асимптоте и граничне вредности и на крају све то спојимо водећи рачуна о монотоности и конвексности.

Ево ово ће можда неке користити, имао сам откуцано па сам додао. Ево нешто још да вам напишем из мог искуства о испитивању функција. : —) Испитати неке компликованије функције захтева добро познавање доста метеријала, али можда у свему највећи проблем је што може да се погрешно, и са једном грешком, доста ствари се онда не уклапа, и не испада добро, тј доста се добије неких погрешних резултата. Себе тешко да можете да спречите да погрешите, али можете открити лако да сте погрешили !!! Свака тачка у проверавању, треба да се слаже са претходнима, најбоље је да „упоредите” знак функције, лimese, асимптоте, монотоност и конвексност. При цртању графика као што је написано, све оно обележите и на крају цртајте график, ја нисам неке ствари обележио јер нисам цртао на папиру, па треба доста више времена да се уради, али оно најбитније јесам. Само још нешто да додам, то сам видео да људи греше, када цртате асимптоте, па график уз њих, неко нацртао график тачно преко асимптоте, то НИЈЕ исправно, јер график и асимптота нису исто, и график НЕ треба ни у једном делу да додирује асимптоту !

Срећно Вам на испиту : —) тј. Нам, јер сам и ја са Вама : —)

### Следе решења задатака : —)

Овде су решења задатака које је Тамара Коледин дала, нисам урадио последња 3 јер постоје у књизи! Мада сам ја овде боље урадио него они тамо : —) ха ха ха, да ме само чује Милан...Могуће је да сам негде погрешно, али мислим да можда чак и нисам! Ако јесам, онда је то због копирања, па после ако нешто не променим неки детаљ, извините за то! Ако уочите неке грешке, јавите ми се на форуму, па ћу их исправити. Молим вас да се не јављате пуно са питањима, како си добио ово, како оно : —) све што нисам могао напамет да решим ја сам поступно написао, тако да требало би да је све јасно !

Поздрав

1. Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x - 1$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција је дефинисана на интервалу, на коме је дефинисана  $\sqrt{x^2 - 1}$ , дакле  $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2° **Нуле и знак:**

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 1} &= x + 1 & x &\geq -1 \\ x^2 - 1 &= x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x &= -1\end{aligned}$$

Знак, за  $x \leq -1$ ,  $f(x) \geq 0$ , а за  $x \geq 1$   $f(x) < 0$ .

3° **Парност и периодичност:** нити је парна, нити непарна, нити периодична

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x - 1 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x - 1 &= -1 \\ f(-1) &= 0 & f(1) &= -2\end{aligned}$$

5° **Асимптоте функције:** Функција нема вертикалних асимптота. Десна коса се види из претходне тачке, дакле десна је хоризонтална и  $y = -1$ . Лева:

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x - 1}{x} = -2 \\ n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x - 1 + 2x) = -1\end{aligned}$$

Дакле лева коса асимптота постоји и то је права  $y = -2x - 1$ .

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Како је  $\sqrt{x^2 - 1}$  увек веће од нуле, добијамо да је за  $x \leq -1$   $f'(x) < 0$ , док се за  $x \geq 1$  види да је  $f'(x) > 0$ .

	$x \leq -1$	$x \geq 1$
$f'(x)$	—	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
	опада	расте

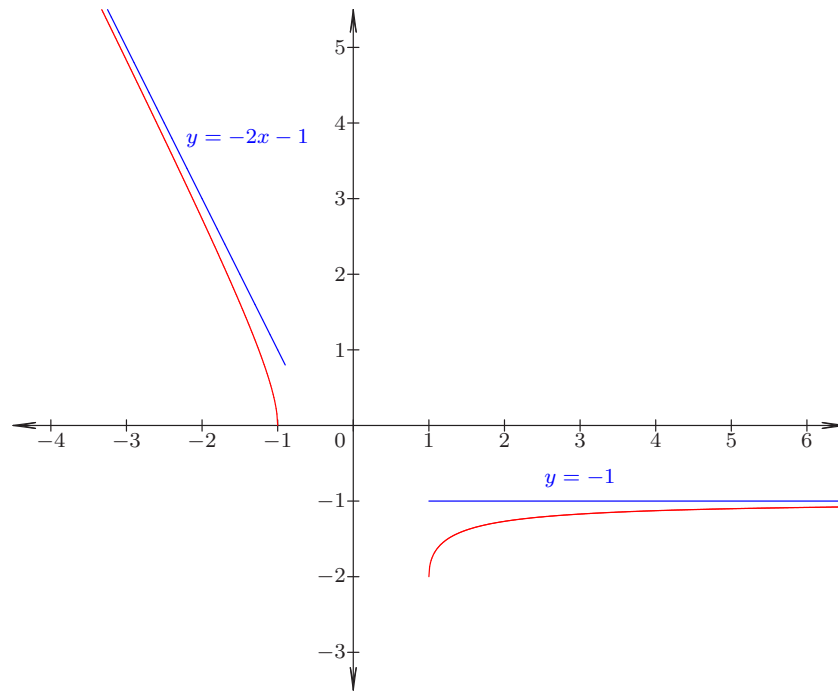
Функција нема локалних екстрема.

7° **Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \cdot \sqrt{x^2 - 1} - (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x) - \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x\right)}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \\ &= -\frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Како је за све  $x$  за које је дефинисана функција  $x^2 - 1 \geq 0$ , закључујемо да је  $f''(x) < 0$ . Дакле функција је на читавом домену конкавна, тј. изгледа отприлике овако  $\cap$ . Функција нема превојних тачака.

График функције:  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x - 1$



**2. Испитати ток и нацртати график функције**  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .

**1° Област дефинисаности:** Функција није дефинисана за  $x = -1$  и  $x = 1$ , па је  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**2° Нуле и знак:** Нема нула, јер  $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$  никада није нула (за реалне бројеве). Знак, како је увек  $x^2 + 1 > 0$ , добијамо да знак зависи само од  $x^2 - 1$ , па је за  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   $f(x) > 0$ , а за  $x \in (-1, 1)$   $f(x) < 0$ .

**3° Парност и периодичност:** Функција је парна.

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x).$$

**4° Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} &= \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ово овако смем да пишем у правоима јер је функција парна !

**5° Асимптоте функције:** Из претходне тачке се види да функција нема вертикалних асимптота, јер на прекидима домена не тежи бесконачности. Али има обострану хоризонталну асимптоту, и то је права  $y = \frac{\pi}{4}$ .

**6° Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(x^2 - 1)^2}{2x^4 + 2} \cdot \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Видимо да знак зависи само од  $x$ , па је

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
	расте	екстремум	опада

$f(0) = \frac{\pi}{4}$ , Добијамо да је локални максимум тачка  $M\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .

**7° Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(x^4 + 1) - 2x \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{2(3x^4 - 1)}{(x^4 + 1)^2} \\ 3x^4 - 1 &= 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{aligned}$$

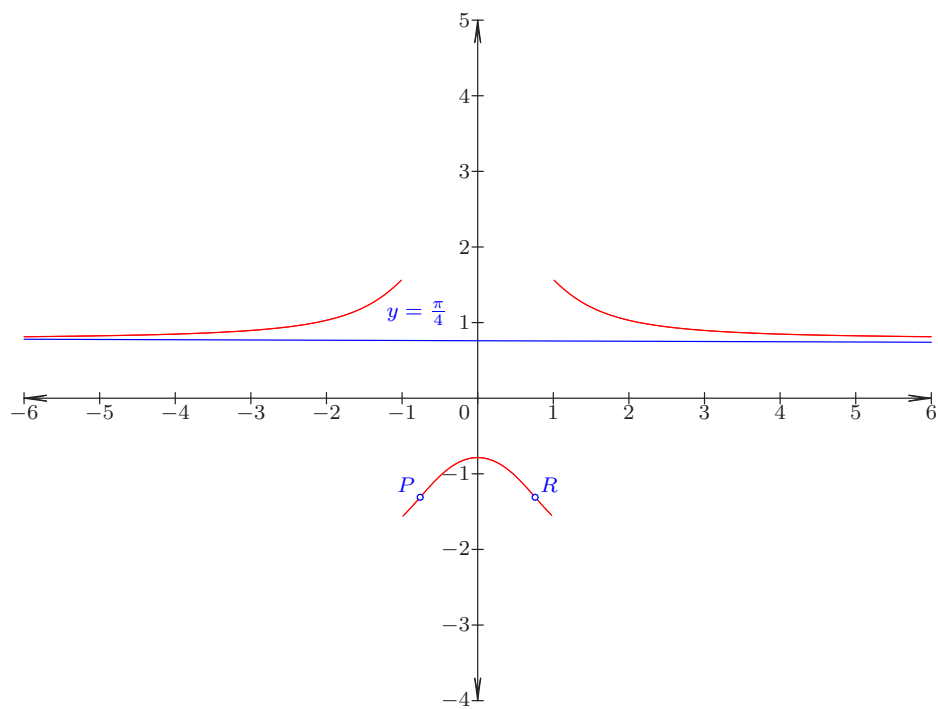
Добијамо

	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	превој	$\cap$	превој	$\cup$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(-2-\sqrt{3}) = -75^\circ = -\frac{5\pi}{12}$$

Дакле, имамо две превојне тачке  $P\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{5\pi}{12}\right)$  и  $R\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{5\pi}{12}\right)$

**График функције:**  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x^2-1}$



**3. Испитати ток и нацртати график функције**  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција је дефинисана за оне  $x$ , за које је  $2x - x^2 > 0$ . Добијамо да је  $D = [0, 2]$ .

2° **Нуле и знак:** Знак, функција је увек позитивна, а нуле су  $x = 0$  и  $x = 2$ .

3° **Парност и периодичност:** нити парна, нити непарна, нити периодична

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:** На крајевима домена  $f(x) = 0$ .

5° **Асимптоте функције:** Нема вертикалних асимптота, а ни косих !

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \sqrt{2x - x^2} + x \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{2x - x^2 + x - x^2}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{-2x^2 + 3x}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{x(-2x + 3)}{\sqrt{2x - x^2}}$$

	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	макс.	$\searrow$

Добијамо да је локални максимум тачка  $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ .

7° **Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-4x + 3) \cdot \sqrt{2x - x^2} + (2x^2 - 3x) \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{2x - x^2} = \\ &= \frac{(-4x + 3) \cdot (2x - x^2) + (2x^2 - 3x) \cdot (1 - x)}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 3x}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(2x^2 - 6x + 3)}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

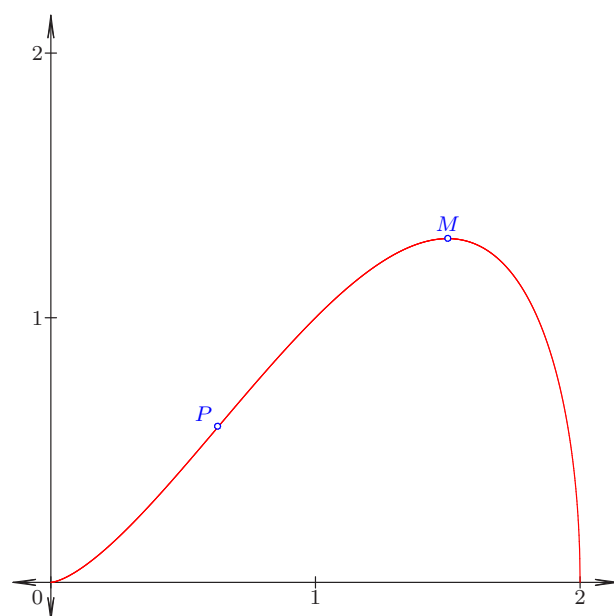
	$\left(0, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, 2\right)$
$2x^2 - 6x + 3$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\cup$	превој	$\cap$

Како је  $f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,59$  добијамо да је превојна тачка  $P\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, 0,59\right)$

Са овим коренима нисам могао да се изборим, па ако неко добије нешто лепо, нека ми јави...



График функције:  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$



4. Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција је дефинисана за све  $x \in \mathbb{R}$ .

2° **Нуле и знак:** Како је  $f(x) = \sqrt[3]{x(3 - x^2)}$ , добијамо три нуле,  $x = 0$  и  $x = \pm\sqrt{3}$ . Сада знак функције:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$x$	—	—	—	0	+	+	+
$3 - x^2$	—	0	+	+	+	0	—
$f(x)$	+	0	—	0	+	0	—

3° **Парност и периодичност:** Функција је непарна!

$$f(-x) = \sqrt[3]{-3x + x^3} = -\sqrt[3]{3x - x^3} = -f(x)$$

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x - x^3} = -\infty$$

5° **Асимптоте функције:** Вертикалних асимптота нема, јер нема прекида домена. Косе асимптоте има, тј. она уствари мора бити обострана јер је функција непарна, а наћи ћу је преко Маклореновог развоја, тако је брже и због нечега боље, видећете зашто!

$$x \rightarrow \infty, \quad f(x) = (3x - x^3)^{\frac{1}{3}} = -x \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -x \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= -x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Из последњег се види да је обострана асимптота права  $y = -x$ . Ја сам развио намерно један члан више да бих сада добио један члан који тежи нули, тј мислим на  $\frac{1}{x}$ , и он не утиче на асимптоту, АЛИ говори о томе да ли се график налази испод или изнад асимптоте!!! Ако је позитиван, онда је изнад, ако је негативан онда испод! Значи када  $x \rightarrow +\infty$  тада је график изнад асимптоте, а када  $x \rightarrow -\infty$  график је испод асимптоте! Ево због овога је боље овако радити, ову помоћ не добијате када тражите помоћу лимеса, она првенствено служи да вам покаже да ли сте погрешили и да ли се резултати уклапају! Ја када год може радим овако, јер је боље и краће, мени и лакше, а ви како хоћете... —)

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 - 3x^2}{(3x - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1 - x^2}{(3x - x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	$\searrow$	мин.	$\nearrow$	макс.	$\searrow$

Добијамо да је локани минимум за  $x = -1$ ,  $f(x) = -\sqrt[3]{2}$ , док је локални максимум за  $x = 1$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{2}$ .

7° Други извод, конвексност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{-2x(3x - x^3)^{\frac{2}{3}} - (1 - x^2) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3 - 3x^2}{(3x - x^3)^{\frac{1}{3}}}}{(3x - x^3)^{\frac{4}{3}}} =$$

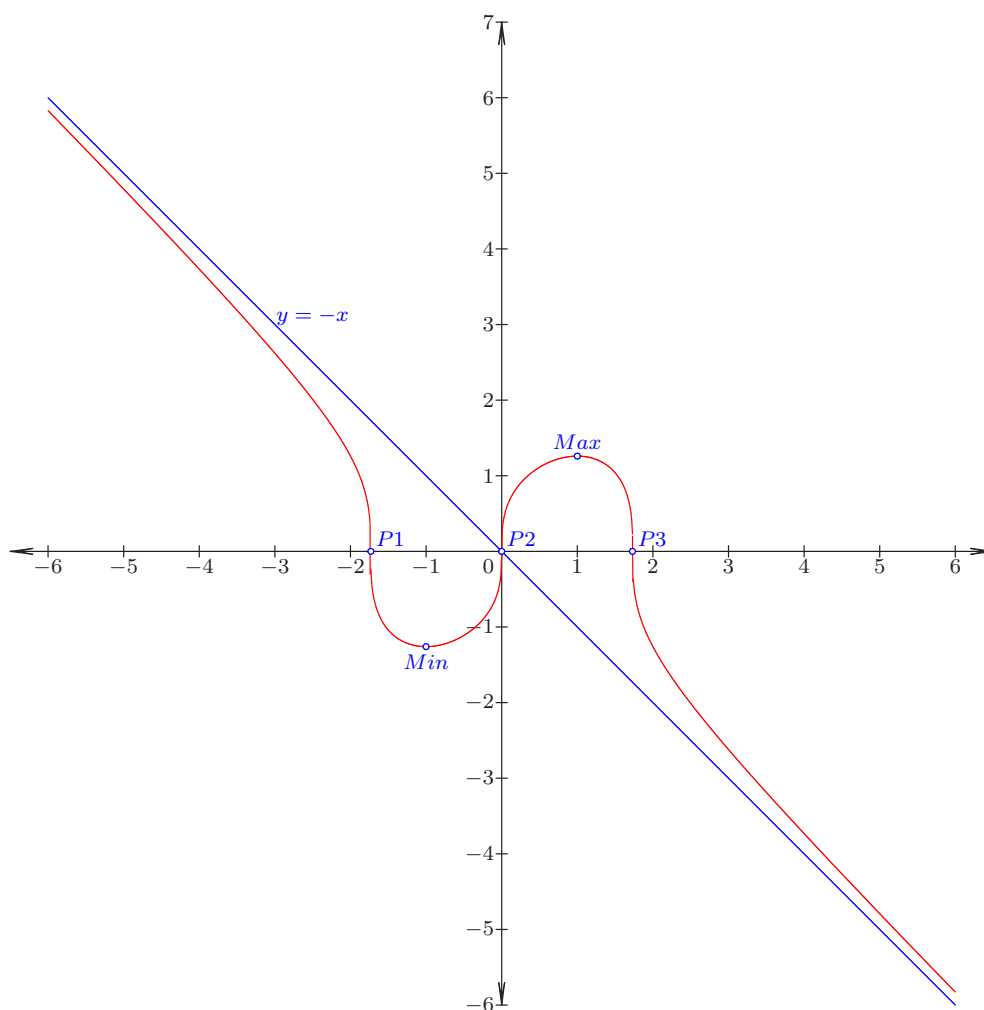
$$\frac{-2x(3x - x^3) - 2 \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^2)}{(3x - x^3)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2x^2 + 2}{(3x - x^3)^{\frac{5}{3}}}$$

Израз у бројиоцу је увек позитиван, а израз у имениоцу истог је знака као и сама функција, али због оног минуса испред само се све окрене, дакле на основу тачке 2° добијамо следеће:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$(3x - x^3)^{\frac{5}{3}}$	+	0	-	0	+	0	-
$f''(x)$	-		+		-		+
$f(x)$	$\cap$	превој	$\cup$	превој	$\cap$	превој	$\cup$

Добијамо три превојне тачке,  $P_1(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $P_2(0, 0)$  и  $P_3(\sqrt{3}, 0)$ .

График функције:



**5.** Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција је дефинисана за све  $x \in \mathbb{R}$ .

2° **Нуле и знак:** Нема нула. Знак, увек је  $f(x) < 0$ .

3° **Парност и периодичност:** Нити парна, нити непарна, нити периодична

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

5° **Асимптоте функције:** Вертикалних асимптота нема, а из претходне тачке се види да је права  $y = 0$  обострана хоризонтална асимптота.

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2} \right)$$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	није деф.	$-$	$0$	$+$	није деф.	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	мин.	$\nearrow$		$\nearrow$

Добијамо да је локални минимум за  $x = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ .

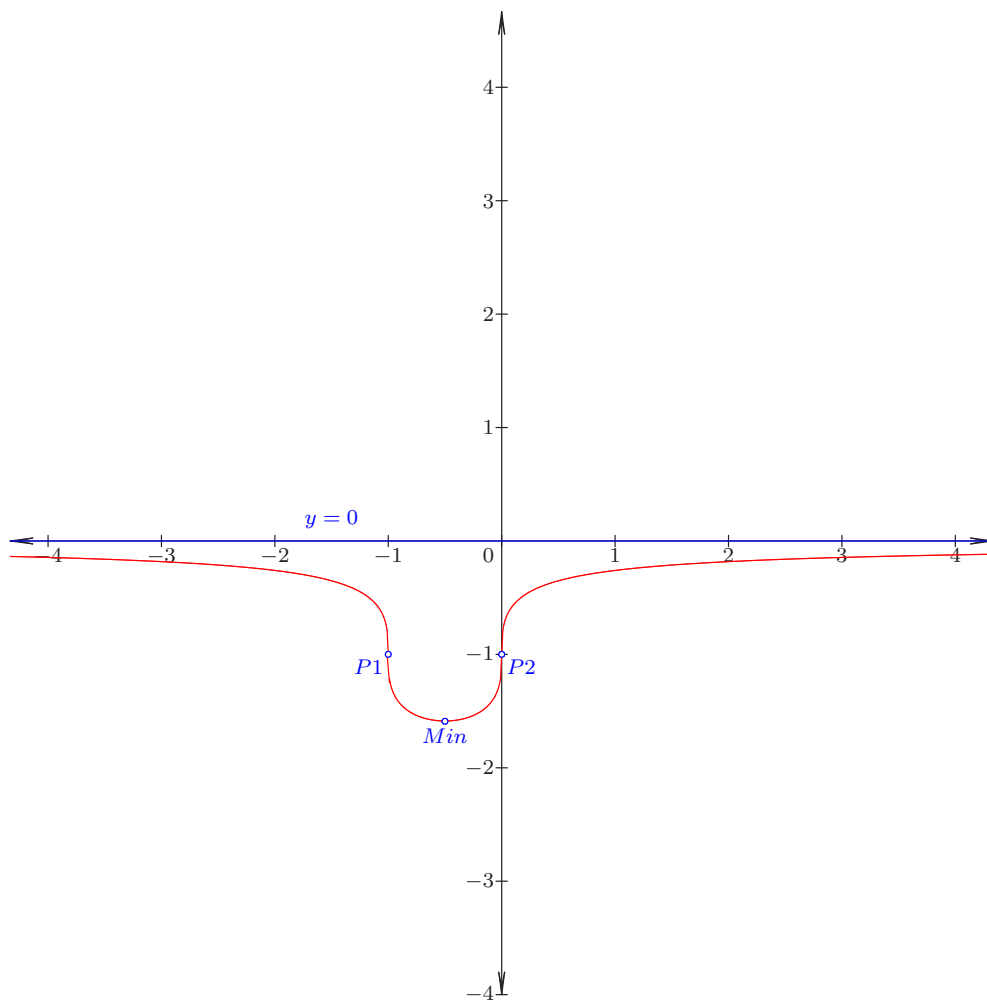
7° **Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \left( \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^5} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^5} \right)$$

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	није деф.	$+$	није деф.	$-$
$f(x)$	$\cap$	превој	$\cup$	превој	$\cap$

Функција има две превојне тачке  $P_1(-1, -1)$  и  $P_2(0, -1)$ .

График функције:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$



**6.** Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = \ln(1 + e^{2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^{-x}$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција је дефинисана за све  $x \in \mathbb{R}$ .

2° **Нуле и знак:** За све  $x$   $f(x) > 0$ , нула нема!

3° **Парност и периодичност:** Нити парна, нити непарна, нити периодична

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5° **Асимптоте функције:** Вертикалних асимптота нема! Из претходне тачке се види да је права  $y = \pi$  лева хоризонтална асимптота. Сада још да нађемо десну косу:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^{-x}}{x} \stackrel{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = 2$$

Пошто сам овде тражио  $f'(x)$ , тј крајњи израз је уствари то, онда ћу то искористити у следећој тачки.

$$\begin{aligned} n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln(1 + e^{2x}) - \ln e^{2x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}} = 0 \end{aligned}$$

Коначно добијамо да је десна коса асимптота права  $y = 2x$ .

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	мин.	$\nearrow$

Функција има локални минимум за  $x = 0$ ,  $f(0) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} \approx 2,17$ .

7° **Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4e^{2x}(1 + e^{2x}) - 2e^{2x} \cdot e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} - \frac{-2e^{-x}(1 + e^{-2x}) - 2e^{-x}(-2e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})^2} = \\ &= \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} - \frac{2e^{-3x} - 2e^{-x}}{(1 + e^{-2x})^2} \end{aligned}$$

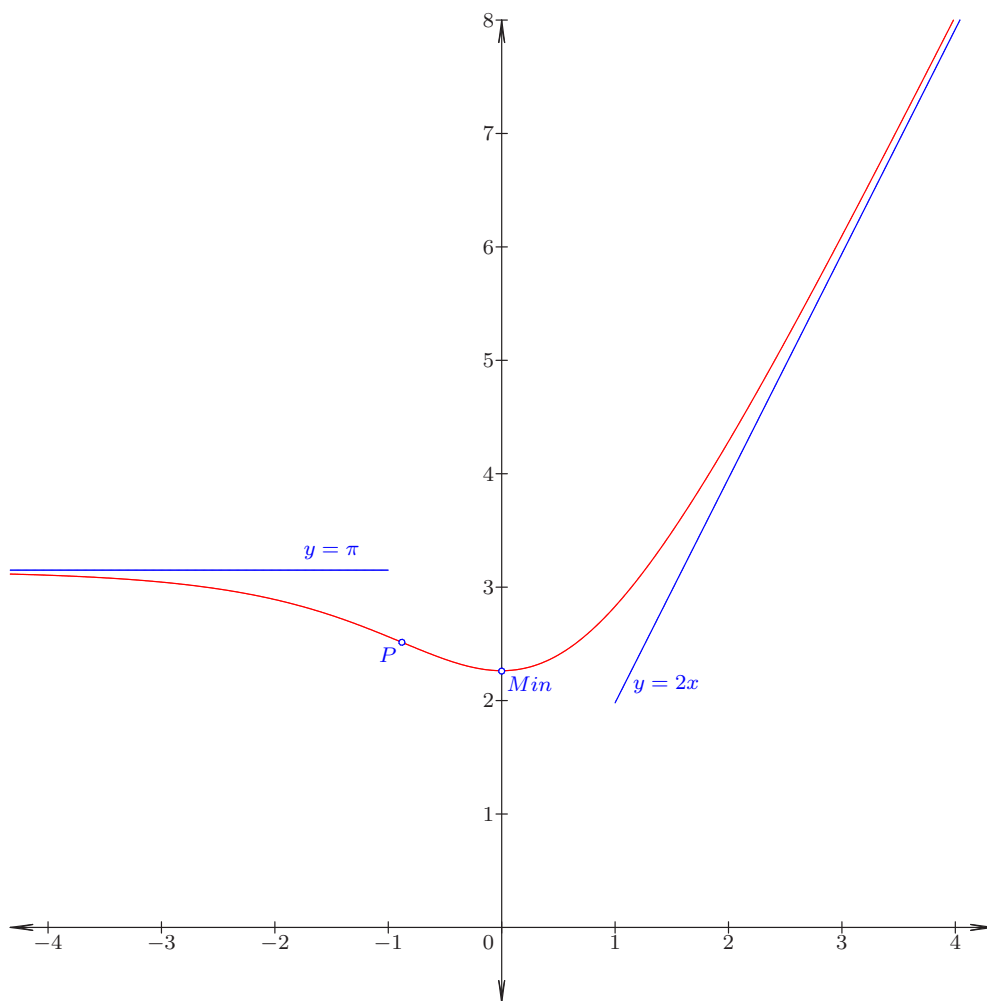
За  $x = -\ln(1 + \sqrt{2})$ ,  $f''(x) = 0$

Добијамо следеће:

	$(-\infty, -\ln(1 + \sqrt{2}))$	$-\ln(1 + \sqrt{2})$	$(-\ln(1 + \sqrt{2}), +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\cap$	превој	$\cup$

Дакле превојна тачка је  $P(-\ln(1 + \sqrt{2}), f(-\ln(1 + \sqrt{2})))$ . Када се то мало среди добије се  $P(-\ln(1 + \sqrt{2}), \ln(4 + 2\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{4})$ , тј приближно добијамо  $P(-0,9 \ 2,5)$ .

**График функције:**  $f(x) = \ln(1 + e^{2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^{-x}$



7. Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ .

1° **Област дефинисаности:** Функција није дефинисана у нули,  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2° **Нуле и знак:** Пошто је експоненцијална увек позитивна, онда знак зависи само од  $x$ , значи за  $x < 0$   $f(x) < 0$ , а за  $x > 0$   $f(x) > 0$ . Нуле нема.

3° **Парност и периодичност:** нити парна, нити непарна, нити периодична

4° **Граничне вредности функције на крајевима домена:** Могу и сада да развијем па ћу то овде урадити.

$$xe^{\frac{1}{x}} = x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 1 = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Сада се види да је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Такође је и

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

5° **Асимптоте функције:** Функција има прекид у тачки  $x = 0$ , па у њеној околини постоји могућност за вертикалним асимптотима. Из претходне тачке се види да постоји вертикална асимптота (због десног лимеса у нули) и то је права  $x = 0$ . Такође се из претходне тачке види да је права  $y = x + 1$  обострана коса асимптота! Када  $x \rightarrow -\infty$  онда је график испод асимптоте, а када  $x \rightarrow +\infty$  график је изнад.

6° **Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Први извод зависи само од овог израза у загради, добијамо

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\left(1 - \frac{1}{x}\right)$	+	није деф.	-	0	+
$f'(x)$	+	није деф.	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	није деф.	$\searrow$	мин.	$\nearrow$

Дакле, тачка  $M(1, e)$  је локални минимум функције.



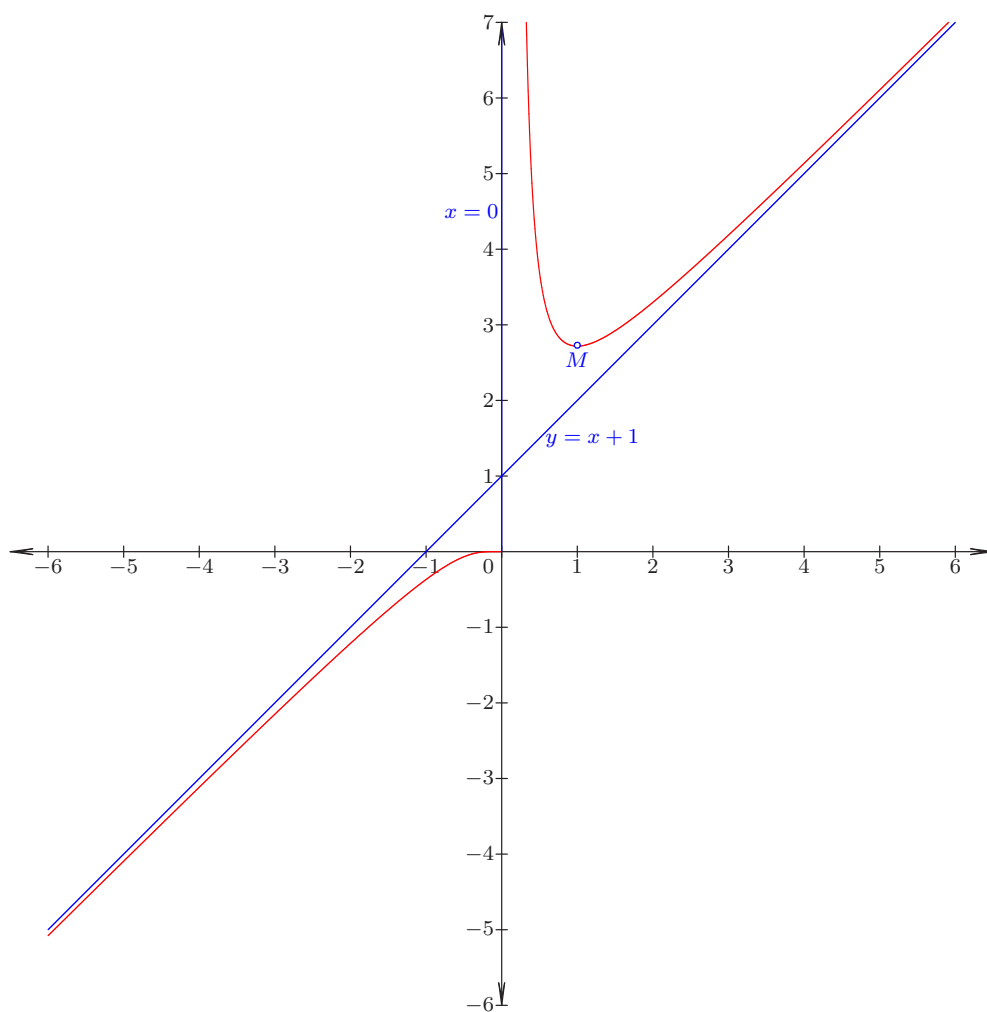
7° Други извод, конвексност и превојне тачке:

$$f''(x) = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''()$	-	није деф.	+
$f(x)$	$\cap$	није деф.	$\cup$

Функција нема превојних тачки.

График функције:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$



8. Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x - 2}$ .

1° Област дефинисаности: Функција није дефинисана за  $x = e^2$ , па је  $D = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$ .

2° Нуле и знак: Има једну нулу  $x = e$ . Знак:

	$(0, e)$	$e$	$(e, e^2)$	$e^2$	$(e^2, +\infty)$
$\ln x - 1$	—	0	+	+	+
$\ln x - 2$	—	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	није деф.	+

3° Парност и периодичност: нити парна, нити непарна, нити периодична.

4° Граничне вредности функције на крајевима домена:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow e^2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

5° Асимптоте функције: Функција има вертикалну асимптоту, и то је права  $x = e^2$ , док је десна хоризонтална асимптота, права  $y = 1$ .

6° Први извод, монотоност и локални екстреми функције:

$$f'(x) = \frac{\frac{\ln x - 2}{x} - \frac{\ln x - 1}{x}}{(\ln x - 2)^2} = -\frac{1}{x(\ln x - 2)^2}$$

За све  $x$  за које је функција дефинисана  $f'(x) < 0$ , дакле функција  $\searrow$ , опада. Нема локалних екстремума.

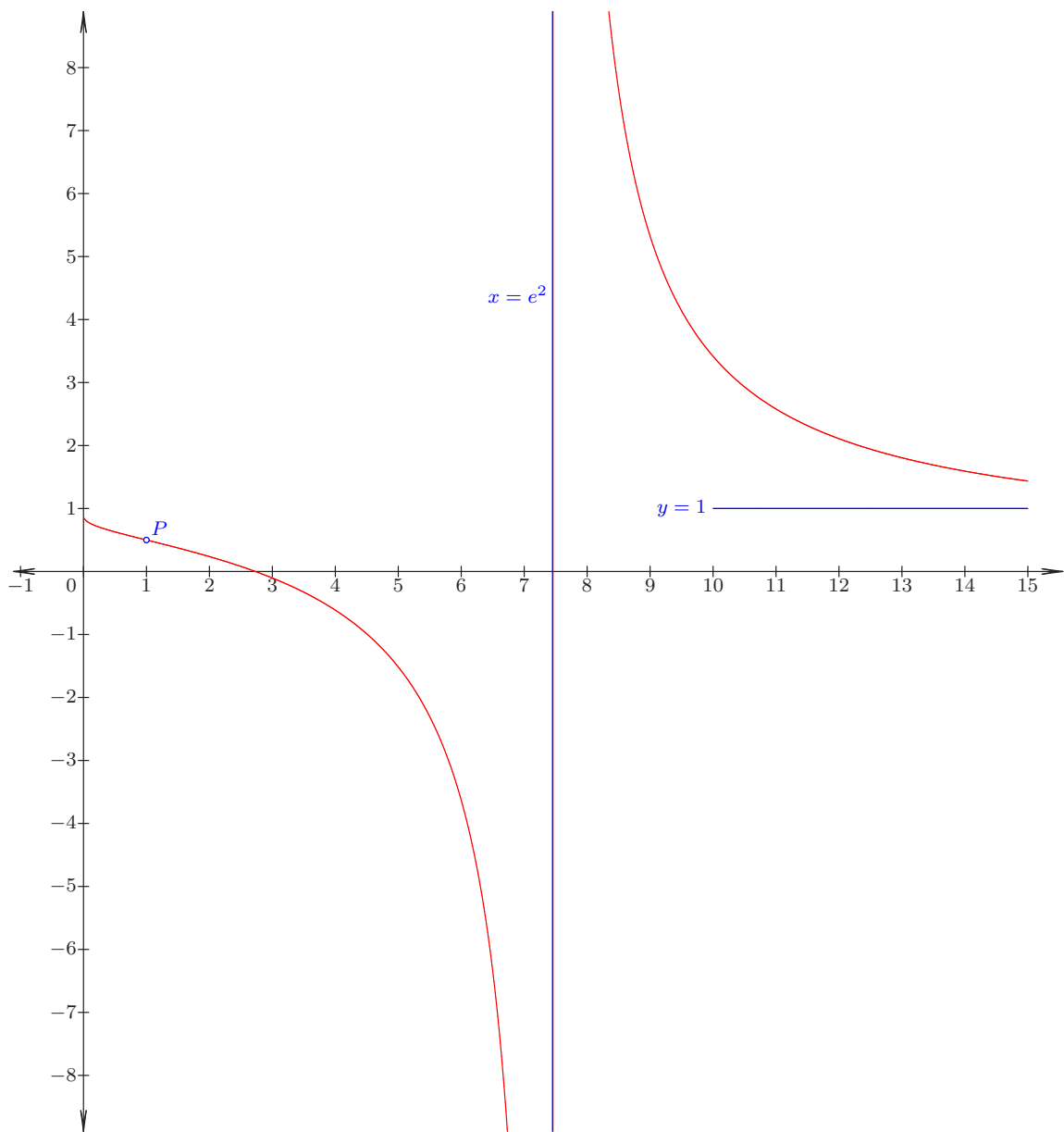
7° Други извод, конвексност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{(\ln x - 2)^2 + 2x(\ln x - 2) \cdot \frac{1}{x}}{x^2(\ln x - 2)^4} = \frac{\ln x}{x^2(\ln x - 2)^3}$$

	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	$e^2$	$(e^2, +\infty)$
$\ln x$	—	0	+	+	+
$(\ln x - 2)^3$	—	—	—	0	+
$f'(x)$	+	0	—	није деф.	+
$f(x)$	$\cup$	превој	$\cap$	није деф.	$\cup$

Добијамо да је превојна тачка  $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

График функције:  $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x - 2}$



**9. Испитати ток и нацртати график функције**  $f(x) = (x-1) \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ .

**1° Област дефинисаности:** Функција није дефинисана на интервалу  $[0, 1]$ .  
Дакле  $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

**2° Нуле и знак:** Нула нема. Знак:

	$(-\infty, 0)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$+$
$\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)$	$+$	$-$
$f(x)$	$-$	$-$

Функција је на целом свом домену, негативна,  $f(x) < 0$ .

**3° Парност и периодичност:** Нити парна, нити непарна, нити периодична.

**4° Граничне вредности функције на крајевима домена:**

$$x \rightarrow \infty \quad f(x) = (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = -1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Добијамо да је  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

**5° Асимптоте функције:** Вертикална асимптота је права  $x = 0$ . Обострана хоризонтална асимптота је права  $y = -1$ . Када  $x \rightarrow -\infty$  график је испод праве, а за  $x \rightarrow +\infty$  график је изнад праве.

**6° Први извод, монотоност и локални екстреми функције:**

$$f'(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) + (x-1) \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} = \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$

За све  $x$  из домена  $f'(x) < 0$ , дакле функција на целом домену опада ( $\searrow$ ).

**7° Други извод, конвексност и превојне тачке:**

$$f''(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}\right) = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

	$(-\infty, 0)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Функција нема превојних тачака.

График функције:  $f(x) = (x - 1) \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right)$

